1. INSIEME DEI NUMERI NATURALI

1.1 CONCETTO DI NUMERO NATURALE: UGUAGLIANZA E DISUGUAGLIANZA

Consideriamo l'insieme E , detto **insieme Universo**, costituito da tutti i possibili insiemi che si possono costruire o pensare. Definiamo in E la relazione R di equipotenza tra insiemi; R è una relazione di equivalenza (ogni relazione R definita in un insieme A che gode della proprietà *riflessiva, simmetrica e transitiva*, è detta relazione di equivalenza) e, pertanto, possiamo ripartire tutti gli insiemi di E in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è costituita da insiemi equipotenti. Tutti gli insiemi che appartengono ad una classe di equivalenza hanno una proprietà comune. Ebbene, chiamiamo **numero naturale** tale proprietà comune. L'insieme formato dai simboli $0, 1, 2, 3, \dots$ si chiama **insieme dei numeri naturali** e si indica con $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Consideriamo due insiemi finiti A e B ; si possono presentare tre casi:

- 1) **L'insieme A è equipotente all'insieme B .** Si scrive $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Indicando con a e b i numeri naturali individuati rispettivamente da A e B , si scrive

$$a = b \text{ e si legge "a uguale b"}$$

L'uguaglianza tra due numeri naturali gode di tre proprietà:

- *Riflessiva*: ogni numero è uguale a se stesso

$$a = a$$

- *Simmetrica*: se un numero è uguale ad un altro, questo è uguale al primo

$$\text{se } a = b \text{ allora } b = a$$

- *Transitiva*: se un numero è uguale ad un altro e questo è uguale ad un terzo, allora il primo e l'ultimo sono uguali

$$\text{se } a = b \text{ e } b = c \text{ allora } a = c$$

Due numeri a e b che non sono uguali si dicono **disuguali** e si scrive:

$$\mathbf{a \neq b} \text{ e si legge "a diverso da b"}$$

- 2) **L'insieme A è equipotente ad un sottoinsieme proprio di B .** Si dice che l'insieme A è **suvvalente** all'insieme B e si scrive $\mathbf{A < B}$. Indicando con a e b i numeri naturali individuati rispettivamente da A e B si scrive

$$a < b \text{ e si legge "a minore di b"}$$

- 3) **Un sottoinsieme A è equipotente a B .** Si dice che l'insieme A è **prevalente** all'insieme B e si scrive $\mathbf{A > B}$. Passando ai numeri naturali dei due insiemi si scrive:

$$a > b \text{ e si legge "a maggiore di b"}$$

La **disuguaglianza tra due numeri naturali** gode della seguente proprietà transitiva: se un numero è maggiore di un altro e questo è maggiore di un terzo allora il primo è maggiore del terzo, ossia:

$$\text{se } a > b \text{ e } b > c \text{ allora } a > c$$

Analogamente:

$$\text{se } a < b \text{ e } b < c \text{ allora } a < c$$

Sussiste inoltre la **legge di esclusione**: dati due numeri naturali a e b si verifica uno e uno solo dei seguenti casi:

$$a < b; \quad a = b; \quad a > b$$

e il verificarsi di uno di essi esclude gli altri due.

1.2 ADDIZIONE CON I NUMERI NATURALI: PROPRIETÀ

Consideriamo due insiemi finiti disgiunti A e B e indichiamo con a e b i numeri naturali individuati rispettivamente da A e B . Sia C è l'unione di A e B , ossia $\mathbf{A \cup B = C}$. Indichiamo con c il numero naturale individuato da C : Il numero c dipende solo da a e b . L'operazione che fa passare dai numeri a e b al numero c prende il nome di **addizione**. In simboli:

$$a + b = c; \quad a \text{ e } b \text{ si dicono } \mathbf{addendi}; \quad c \text{ si chiama } \mathbf{somma}$$

L'operazione di addizione nell'insieme dei numeri naturali è sempre possibile. La somma di tre o più numeri naturali, presi in un certo ordine, è il numero naturale che si ottiene addizionando il primo al secondo, la somma ottenuta con il terzo, la nuova somma con il quarto e così di seguito, finché si esauriscono tutti i numeri.

L'addizione dei numeri naturali gode delle seguenti **proprietà**:

- *Commutativa*: scambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia. Infatti:

$$A \cup B = B \cup A \text{ e quindi } a + b = b + a$$

- *Associativa*: la somma di più numeri non cambia se a due o più addendi si sostituisce la loro somma. Infatti:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ e quindi } a + (b + c) = (a + b) + c$$

- Lo zero è l'elemento neutro dell'addizione, perché sommato ad ogni altro numero naturale lo lascia inalterato. Infatti:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \text{ e quindi } a + 0 = 0 + a = a$$

Se B è l'insieme disgiunto da A, che individua il numero 1, l'insieme $C = A \cup B$ individua il numero:

$$c = a + 1$$

che si chiama **successivo** di a.

1.3 SOTTRAZIONE CON I NUMERI NATURALI: PROPRIETÀ

Consideriamo due insiemi finiti A e B tali che $A \supseteq B$. Indicando con a e b i numeri naturali individuati dai due insiemi, sussiste la relazione:

$$a \geq b$$

Se C è l'insieme differenza dei due insiemi, ossia $A - B = C$, indichiamo con c il numero naturale individuato da C. L'operazione che fa passare dalla coppia (a,b) di numeri naturali al numero c prende il nome di sottrazione e si scrive:

$$a - b = c$$

a si chiama **minuendo**; b si chiama **sottraendo**; c si chiama **differenza**

La sottrazione è un'operazione **non sempre possibile**; l'operazione $a - b$ dà un numero naturale solo se $a \geq b$.

La sottrazione dei numeri naturali gode delle seguenti **proprietà**:

- L'operazione di sottrazione è l'inversa dell'addizione. Infatti $C \cup B = A$, ed essendo C e B disgiunti possiamo scrivere:

$$c + b = a$$

$$a - b = c \Rightarrow c + b = a$$

- *Invariantiva*: la differenza fra due numeri naturali non cambia se ad entrambi si addiziona o si sottrae (se possibile) uno stesso numero. Ossia:

$$a - b = (a + m) - (b + m) \text{ con } b \leq a$$

$$a - b = (a - n) - (b - n) \text{ con } n \leq b \leq a$$

Esempio:

Consideriamo la differenza $46 - 14 = 32$. Sommando ai termini della sottrazione il numero 10, abbiamo:

$$[(46 + 10) - (14 + 10)] = 56 - 24 = 32$$

Sottraendo il numero 5 da entrambi i termini della sottrazione, abbiamo:

$$(46 - 5) - (14 - 5) = 41 - 9 = 32$$

1.4 MOLTIPLICAZIONE CON I NUMERI NATURALI: PROPRIETÀ

Consideriamo due insiemi finiti A e B che individuano i numeri naturali a e b, rispettivamente. Eseguendo il **prodotto cartesiano** $A \times B$ dei due insiemi, si ottiene un insieme C formato da tutte le coppie i cui primi elementi appartengono ad A e i secondi elementi appartengono a B. Si ha:

$$A \times B = C$$

L'insieme C individua il numero naturale c, che si indica con:

$$a \cdot b = c$$

a e b si dicono **fattori** c si chiama **prodotto**

L'operazione che fa passare dai due numeri a e b al numero c prende il nome di **moltiplicazione**.

Esempio:

Consideriamo gli insiemi $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5\}$. Associando ciascun elemento di A con ciascun elemento di B otteniamo l'insieme P delle coppie ordinate:

$$(1,4); (1,5); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5)$$

che è il prodotto cartesiano degli insiemi A e B. Il prodotto cartesiano di due insiemi consente di

considerare il prodotto di due numeri sotto un nuovo aspetto: quello della totalità delle coppie ordinate che si possono formare associando ciascun elemento di un insieme con ciascun elemento di un altro insieme.

Prodotto di più numeri

Il prodotto di tre o più fattori è il numero che si ottiene moltiplicando il primo fattore per il secondo, il prodotto ottenuto per il terzo e così di seguito fino ad esaurire tutti i fattori.

Esempio:

Supponiamo di voler eseguire l'operazione: $5 \times 3 \times 2$.

Si esegue prima la moltiplicazione 5×3 e poi si moltiplica il prodotto ottenuto per 2. L'operazione si può indicare con la scrittura: $5 \times 3 \times 2 = (5 \times 3) \times 2 = 15 \times 2 = 30$

Prodotto di una grandezza per un numero

Il prodotto di una grandezza per un numero è una grandezza omogenea alla data, avente per misura il prodotto della misura della grandezza per il numero.

La moltiplicazione dei numeri naturali gode delle seguenti **proprietà**:

- **Commutativa**: cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia $a \cdot b = b \cdot a$
- **Associativa**: il prodotto di più fattori non cambia se a due o più di essi si sostituisce il loro prodotto $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Distributiva** rispetto alla somma: per moltiplicare una somma indicata per un numero si moltiplica ciascun addendo della somma per il numero e si addizionano i prodotti ottenuti $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
- **Distributiva** rispetto alla differenza: per moltiplicare una differenza indicata per un numero, si moltiplicano il minuendo e il sottraendo per il numero e si sottraggono i prodotti ottenuti $(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$
- **Raccoglitrice** rispetto alla somma: se si devono addizionare più prodotti aventi un fattore comune, si moltiplica tale fattore per la somma dei fattori non comuni dei singoli prodotti $(a \cdot c) + (b \cdot c) + (d \cdot c) = c \cdot (a + b + d)$
- **Raccoglitrice** rispetto alla differenza: se si devono sottrarre due prodotti aventi un fattore comune si moltiplica tale fattore per la differenza dei fattori non comuni dei singoli prodotti $(a \cdot c) - (b \cdot c) = c \cdot (a - b)$
- Il **numero uno** è l'elemento neutro della moltiplicazione, perché moltiplicato per qualsiasi numero naturale lo lascia inalterato $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- **Legge di annullamento**: un prodotto è nullo se e solo se almeno uno dei fattori è nullo $a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$

1.5 DIVISIONE CON I NUMERI NATURALI: PROPRIETÀ

Siano A e B due insiemi finiti i quali individuano, rispettivamente, i numeri a e b. Supponiamo che l'insieme A sia equipotente all'insieme B per cui vale la relazione $a \geq b$. Considerando tutti i possibili sottoinsiemi di A equipotenti a B, possono presentarsi due casi:

- 1) l'insieme A risulta decomponibile in sottoinsiemi E, F, G, ... a due a due disgiunti e tali che ognuno di essi è equipotente all'insieme B. Indichiamo con C l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi ottenuti dalla decomposizione di A, ossia $C = \{E, F, G, \dots\}$ e sia c il numero naturale individuato dall'insieme C. L'operazione che fa passare dai numeri a e b al numero c, (quando è possibile) prende il nome di **divisione** e si scrive:

$$a : b = c$$

a si chiama **dividendo**; b si chiama **divisore**; c si chiama **quoziente**

Osserviamo che gli insiemi E, F, G, ..., T sono in numero di c e quindi $b + b + b + \dots + b = a$, gli addendi sono in numero di c, da cui $b \cdot c = a$. Le due espressioni $a : b = c$ e $b \cdot c = a$ risultano equivalenti e si dice che l'operazione di divisione è l'inversa della moltiplicazione.

- 2) L'insieme A non può essere decomposto in sottoinsiemi disgiunti a due a due e ciascuno equipotente all'insieme B. Vi può essere uno dei sottoinsiemi di A, diciamo R che sia suvvalente a B,

ossia:

$$C = \{E, F, G, \dots, R, \dots\} \text{ e } R < B$$

Indicati con a, b, c, r i numeri individuati rispettivamente dagli insiemi A, B, C, R si dice **quoziente** tra a e b il numero c e **resto** della divisione il numero r ; r risulta minore di b .

La divisione dei numeri naturali gode delle seguenti **proprietà**:

- **Invariante**: il quoziente tra due numeri naturali a e b assegnati nell'ordine, non varia se si moltiplica o si divide (se possibile) per uno stesso numero naturale $d \neq 0$ sia il dividendo sia il divisore, cioè:

se $a : b = c$ si ha anche

$$\begin{cases} (a \cdot d) : (b \cdot d) = c \\ (a : d) : (b : d) = c \end{cases}$$

Esempio: Eseguiamo la divisione $23 : 7$; il quoziente della divisione è 3 ed il resto è 2. Se moltiplichiamo sia il dividendo che il divisore per uno stesso numero, ad esempio per 4, abbiamo $92 : 28$. Il quoziente di questa divisione è 3 mentre il resto è 8. Vediamo dunque che il quoziente rimane invariato mentre il resto rimane moltiplicato per 4.

Similmente eseguiamo la divisione $50 : 12$; il quoziente della divisione è 4 mentre il resto è 10. Se dividiamo il dividendo e il divisore per uno stesso numero, ad esempio per 2, abbiamo $29 : 6$. Il quoziente di questa divisione è 4 mentre il resto è 5. Vediamo, dunque, che il quoziente rimane invariato mentre il resto rimane diviso per 2.

- **Distributiva** del quoziente rispetto alla somma: per dividere una somma per un numero si divide ciascun addendo della somma per il numero e si addizionano i quozienti ottenuti.

Esempio: Supponiamo di voler eseguire $(8 + 10 + 6) : 2$. Eseguendo l'addizione degli addendi racchiusi in parentesi e dividendo la somma ottenuta per 2 si ha $24 : 2 = 12$. Allo stesso risultato si perviene eseguendo: $(8 : 2) + (10 : 2) + (6 : 2) = 4 + 5 + 3 = 12$

- **Distributiva** del quoziente rispetto alla differenza: per dividere una differenza per un numero si dividono il minuendo e il sottraendo per il numero e si sottraggono i quozienti ottenuti.

Esempio: Similmente, volendo eseguire: $(25 - 15) : 5$ si ha $(25 : 5) - (15 : 5) = 5 - 3 = 2$.

Regola per eseguire una divisione con numeri naturali

Per eseguire la divisione fra due numeri a e b con $a \geq b > 0$, consideriamo l'insieme dei multipli di b i cui elementi sono:

$$0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, \dots, q \cdot b, \dots$$

Si possono presentare due casi:

1. Il numero a appartiene a tale insieme. Supponendo che a sia uguale all'elemento $q \cdot b$, si ha allora $a = q \cdot b$ e possiamo scrivere $a : b = q$. Il numero q è il quoziente dei numeri a e b .
2. Il numero a non appartiene a tale insieme. In tal caso a sarà compreso fra due multipli successivi di b ; ad esempio tra $q \cdot b$ e $(q + 1) \cdot b$. Ne segue che $a > q \cdot b$ e $a < (q + 1) \cdot b$. Se indichiamo con r la differenza tra a e qb , ossia $a - q \cdot b = r$ possiamo scrivere $a = q \cdot b + r$, con $r < b$. Il numero q è il quoziente dei numeri a e b ed r è il resto. Diremo che q è il quoziente **approssimato per difetto** e il numero $(q + 1)$ è il quoziente **approssimato per eccesso**.

1.6 ELEVAMENTO A POTENZA

Dati due numeri naturali a e n con $n > 1$, si definisce **potenza di base a ed esponente n** il prodotto di n fattori tutti uguali ad a e si indica con la scrittura a^n .

Esempio: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

In una potenza non si può scambiare la base con l'esponente, per cui l'elevazione a potenza non gode della proprietà commutativa.

Casi particolari dell'elevazione a potenza

- Una potenza di base 0 è uguale a 0. *Esempio: $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$*
- Una potenza di base 1 è uguale a 1. *Esempio: $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$*
- Una potenza di esponente 1 è uguale alla base. *Esempio: $3^1 = 3$*
- Una potenza di base 10 è uguale all'unità seguita da tanti zeri quante sono le unità dell'esponente. *Esempio: $10^3 = 1000$; $10^2 = 100$; $10^4 = 10000$*

Proprietà delle potenze

- Prodotto di due potenze. Il prodotto di due o più potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti, ossia:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Esempio: $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 2^{3+4}$

- Il quoziente di due potenze. Il quoziente di due potenze con la stessa base è uguale ad una potenza che per base ha la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti, ossia:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ se } m > n.$$

Esempio: $5^7 : 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

- Potenza con esponente 0. Una potenza con esponente 0 è uguale a 1, ossia $a^0 = 1$.
- Potenza di potenza. La potenza di una potenza è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti, ossia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- La potenza di un prodotto. La potenza di un prodotto è uguale al prodotto della potenza dei singoli fattori, ossia: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
- Prodotto di potenze di uguale esponente. Il prodotto di due o più potenze con lo stesso esponente è una potenza avente lo stesso esponente e per base il prodotto delle basi, ossia:

$$(a^m \cdot b^m \cdot c^m) = (a \cdot b \cdot c)^m.$$
- Potenza di un quoziente. La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze del dividendo e del divisore, ossia: $(a : b)^m = a^m : b^m$.