Aritmetica

Algebra

Geometria

Trigonometria

1. ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA

1.1 PROPOSIZIONI

La **logica** fornisce all'uomo gli strumenti indispensabili per controllare la rigorosa validità dei suoi ragionamenti. Come la matematica, la logica affonda le sue radici nella Grecia classica. Guglielmo Leibniz si può considerare tra i precursori della moderna logica matematica, che si suole far iniziare nel 1847 quando Giorgio Boole presenta una **algebra della logica**. Alla base della logica matematica possiamo porre la seguente definizione di **proposizione**:

"Proposizione o enunciato è una espressione linguistica, che si indica con p,q,r,…, composta da un soggetto e da un predicato, che può essere ritenuta vera oppure falsa".

Ad ogni proposizione associamo il suo **valore di verità**; l'essere, cioè, vera o falsa che indicheremo con i simboli V o F.

Le proposizioni devono soddisfare i seguenti principi:

- una proposizione o è vera o è falsa, non possono sussistere altre possibilità (**Principio del terzo escluso**);
- una proposizione non può essere contemporaneamente sia vera che falsa (**Principio di non contraddizione**).

1.2 CONNETTIVI

Come nel linguaggio comune, anche nella logica, partendo da una proposizione elementare è possibile costruire proposizioni composte. Le particelle del discorso che permettono di formare nuove proposizioni prendono il nome di **connettivi logici**. Riportiamo nella tabella che segue i connettivi logici, i simboli e le corrispondenti operazioni logiche:

Connettivo	Simbolo	Operazione logica
non	–	**negazione**
e	$\wedge$	**congiunzione**
o	$\vee$	**disgiunzione**
se...allora	$\rightarrow$	**implicazione materiale**
se e solo se...allora	$\leftrightarrow$	**doppia implicazione**

Tab. 1.1 Connettivi, simboli e operazioni logiche

La parte della logica che si occupa delle operazioni con le proposizioni prende il nome di **calcolo delle proposizioni** o **calcolo degli enunciati**.

1.3 NEGAZIONE

Il connettivo **"non"** opera su una proposizione vera trasformandola in una proposizione falsa e viceversa. L'operazione di negazione di una proposizione p si indica col simbolo $\overline{\mathbf{p}}$. Quanto detto possiamo rappresentarlo con la **tabella di verità**.

$\mathbf{p}$	$\overline{\mathbf{p}}$
V	**F**
F	**V**

Tab. 1.2 Tabella di verità della negazione

È anche vero che $\overline{\overline{\mathbf{p}}} = \mathbf{p}$

Esempio:

$\mathbf{p}$ = Andrea dorme

$\overline{\mathbf{p}}$ = non (Andrea dorme) = Andrea non dorme

$\overline{\overline{\mathbf{p}}}$ = non è vero che Andrea non dorme

1.4 CONGIUNZIONE E DISGIUNZIONE

Il connettivo **"e"** congiunge due proposizioni, individuando una proposizione vera se quelle di partenza sono entrambe vere, falsa negli altri casi. Se indichiamo la congiunzione tra due proposizioni p e q col simbolo $p \wedge q$ (si legge "p e q") otteniamo la seguente **tabella di verità**:

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tab. 1.3 Tabella di verità della congiunzione

Esempio:

3 è maggiore di due (vero) *e 2 è un numero pari* (vero) *= vero*

3 è maggiore di due (vero) *e 2 è un numero dispari* (falso) *= falso*

3 è minore di 2 (falso) *e 2 è un numero pari* (vero) *= falso*

3 *è minore di 2* (falso) *e 2 è un numero dispari* (falso) *= falso*

Il connettivo **"o"** connette due proposizioni determinando una proposizione falsa se ambedue sono false, una proposizione vera negli altri tre casi.
Se indichiamo la congiunzione logica tra due proposizioni p e q col simbolo $p \vee q$ (si legge "p o q") otteniamo la seguente **tabella di verità**:

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tab. 1.4 Tabella della verità della disgiunzione

Esempio:

4 è maggiore di tre (vero) *o 4 è un numero pari* (vero) *= vero*

4 è un numero pari (vero) *o 3 è maggiore di 4* (falso) *= vero*

4 è un numero dispari (falso) *o 4 è maggiore di 3* (vero) *= vero*

4 è un numero dispari (falso) *o 4 è maggiore di 5* (falso) *= falso*

La congiunzione e la disgiunzione godono di alcune importanti proprietà che riportiamo in *Tabella 1.5*

	Congiunzione	**Disgiunzione**
Idempotenza	$p \wedge q = p$	$p \vee q = p$
Commutativa	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

Tab. 1.5 Proprietà della congiunzione e della disgiunzione

1.5 CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI

Una sequenza di proposizioni e connettivi costituisce una frase logica. Si dice **formula** una frase logica in cui ogni coppia di variabili enunciative è collegata da un connettivo. Per il **calcolo delle proposizioni** abbiamo bisogno di regole grammaticali che permettono di costruire **formule ben formate** (brevemente f.b.f.) o **formule preposizionali**. Assumiamo le seguenti regole:

- le lettere …p,q,r,… che rappresentano gli enunciati sono f.b.f;
- se p o q sono f.b.f. allora sono f.b.f. anche $\overline{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$

Se assegniamo alle lettere enunciative i valori logici **V** (Vero) e **F** (Falso), la f.b.f. che si ottiene

assume un ben determinato valore di verità. Questo valore risulterà **V** o **F** a seconda dei valori di verità delle lettere enunciative che la compongono.
Esempio: determinare la tabella di verità della seguente formula preposizionale

$$(p \vee q) \wedge r$$

p	q	r	p∨q	(p∨q)∧r
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

1.6 DEDUZIONE LOGICA E CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

La **deduzione logica** è il ragionamento che sta alla base della dimostrazione di un qualsiasi teorema. L'enunciato di un teorema si presenta sempre in una delle due forme seguenti:

<<da H si deduce T>>
<<se H allora T>>

dove le proposizioni H e T sono chiamate rispettivamente **ipotesi** e **tesi**.
La scrittura $\mathbf{p \Rightarrow q}$ si legge p implica q. Se accade che è vera la proposizione $\mathbf{p \Rightarrow q}$ e contemporaneamente è vera anche la proposizione inversa, allora $\mathbf{p \Rightarrow q}$ si scrive $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$. In tal caso p e q si dicono **logicamente equivalenti**. Un teorema ($\mathbf{H \Rightarrow T}$) e il suo inverso ($\mathbf{T \Rightarrow H}$) che si sintetizzano nella scrittura $\mathbf{H \Leftrightarrow T}$ possono essere così formulati:

condizione necessaria e sufficiente affinché H sia vera è che T sia vera

2. GLI INSIEMI

2.1 RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Il concetto matematico di **insieme** è un concetto primitivo ossia non definibile. Si stabilisce che: perché si abbia un insieme occorre che gli oggetti che lo costituiscono, che sono i suoi elementi, siano ben determinati e che si possa dire senza ambiguità se un elemento appartiene o no all'insieme. Per indicare che **a** è un elemento di un insieme **A**, scriviamo $\mathbf{a \in A}$ e si legge *"a appartiene ad A"*. Se un elemento a non appartiene all'insieme A, si scrive $\mathbf{a \notin A}$ e si legge *"a non appartiene ad A"*.
Un insieme può essere:

- **infinito** se, preso comunque un certo numero di suoi elementi, si può sempre pensare ad un altro elemento dell'insieme distinto da quelli considerati;
- **finito** se possiamo contarne gli elementi;
- **vuoto** se è privo di elementi.

Gli insiemi numerici vengono indicati con lettere specifiche come mostrato in *tab. 2.1*

Simbolo	Significato
N	**Insieme dei numeri naturali**
Z	**Insieme dei numeri interi**
Q	**Insieme dei numeri razionali**
R	**Insieme dei numeri reali**
N*, Z*, Q*, R*	**Insieme privati dello zero**
$\mathbf{Z^+, Q^+, R^+}$	**Interi razionali, reali positivi**
$\mathbf{Z^-, Q^-, R^-}$	**Interi, razionali, reali negativi**
$\varnothing$	**Insieme vuoto (si legge fi)**

Tab. 2.1 Insiemi numerici

Un insieme può essere individuato attraverso diverse rappresentazioni:

- **Rappresentazione tabulare**
  Possiamo rappresentare un insieme elencando i suoi elementi entro parentesi graffe separati tra loro da una virgola o da un punto e virgola.
  Esempio: **A = {a,e,i,o,u}** indica l'insieme delle vocali dell'alfabeto
- **Rappresentazione caratteristica**
  Si fornisce una proprietà caratteristica dell'insieme, cioè una proprietà che individua senza ambiguità tutti gli elementi dell'insieme e solo quelli. Questo modo di individuare un insieme si scrive: **A = {x|x** gode dalla proprietà **p}** e si legge: A è l'insieme degli elementi che godono della proprietà **p**.
  Esempio: **D = {x|x** è un numero naturale dispari } e si legge: D è l'insieme degli elementi x tali che x è un numero naturale dispari.
- **Rappresentazione mediante diagrammi di Venn**
  Per rappresentare un insieme indichiamo i suoi elementi entro una linea chiusa come indicato in *Fig. 2.1*

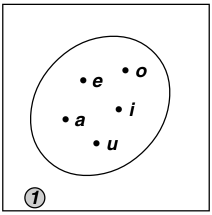

Fig. 2.1 Rappresentazione di un insieme

2.2 INSIEMI UGUALI, APPARTENENZA E INCLUSIONE. INSIEME DELLE PARTI

➢ Insiemi uguali

Due insiemi si dicono uguali quando sono costituiti dagli stessi elementi,
Esempio: se A = {6,7,8,9} e B = {7,8,6,9} diremo che A e B sono due insiemi uguali.
Se due insiemi A e B sono uguali scriveremo **A=B** (o **A≡B**) (si legge A è uguale a B o A coincide con B). L'uguaglianza tra due insiemi è espressa logicamente nel modo seguente:

$$A\equiv B\Leftrightarrow[\forall x:(x\in B\Rightarrow x\in A)\wedge(x\in A\Rightarrow x\in B)]$$

➢ Appartenenza ed inclusione

Consideriamo i seguenti insiemi: A={x|x *è una lettera dell'alfabeto italiano*), B={a,e,i,o,u}. È evidente che gli elementi di B sono anche elementi di A. Un insieme B i cui elementi appartengono anche ad un altro insieme A si dice **sottoinsieme** o **parte di A**. Si dice anche che **B è contenuto in A** e si scrive **B⊂A** dove "⊂" è il simbolo dell'inclusione. Formalmente la definizione si esprime:

$$B\subset A\Leftrightarrow(\forall x | x\in B\Rightarrow x\in A)$$

Esempio: dato l'insieme N dei numeri naturali, suoi sottoinsiemi sono P={naturali pari}, D={naturali dispari}.
Dalla definizione segue:

- ogni insieme A è sottoinsieme di se stesso A⊂A;
- se A⊂B e B⊂C allora A⊂C *(proprietà transitiva);*
- l'insieme vuoto ∅ è sottoinsieme di ogni insieme.

Ogni insieme non vuoto ha almeno due sottoinsiemi: se stesso e l'insieme vuoto che vengono anche detti **sottoinsiemi impropri**. Qualsiasi altro sottoinsieme di un insieme A che non contenga almeno un elemento di A si dice **sottoinsieme proprio**. Viene inoltre indicato con E l'**insieme Universo** cioè l'insieme che contiene tutti gli insiemi costruibili e pensabili.

➢ Insieme delle parti

Dato un insieme A è possibile scrivere tutti i suoi sottoinsiemi propri e impropri. Per esempio, i sottoinsiemi dell'insieme A= {1,2,3} sono: S_1=∅, S_2= {1}, S_3= {2}, S_4= {3}, S_5= {1,2}, S_6= {1,3}, S_7= {2,3}, S_8=A. Questi sottoinsiemi costituiscono gli elementi di un nuovo insieme P(A) denominato **insieme delle parti di A.**

2.3 OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

Un insieme si può ottenere come combinazione di altri insiemi mediante le seguenti operazioni:

➢ Intersezione

Si dice intersezione di due insiemi A e B, l'insieme C degli elementi che appartengono sia ad A che a B; si scrive C=A∩B (si legge "C è uguale ad A intersecato B"). In forma simbolica si scrive:

$$A\cap B = \{x | (x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

Se A e B non hanno elementi in comune si dicono **disgiunti** (A∩B =∅).
Esempio: dati gli insiemi A= {1,2,3,4,5,6,7,8,9} e B= {2,4,6,8,10,12,14,16} si ha A∩B = {2,4,6,8}.

➢ Unione

Si chiama **unione** di due insiemi A e B, l'insieme C degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi; si scrive A∪B=C (si legge "A unito B è uguale a C"). In forma simbolica:

$$A\cup B = \{x | (x\in A)\vee(x\in B)\}$$

Esempio:
dati gli insiemi A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} e B={2,4,6,8,10,12,14,16} si ha A∪B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16}.
Le operazioni di intersezione e di unione godono di alcune interessanti proprietà e relazioni mostrate in *Tab. 2.2*.

	Intersezione	Unione
	$A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$ $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap U = A$	$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$ $A \cup \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = A$
Idempotenza	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Assorbimento	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

Tab. 2.2 Proprietà delle operazioni intersezione e unione

➢ Differenza

Si chiama **differenza** di due insiemi A e B, presi nell'ordine, l'insieme che si indica con A-B (si legge "A meno B") e che è costituito dagli elementi di A che non appartengono a B. In simboli:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Esempio: dati gli insiemi A= {1,2,3,4,5,6,7,8,9} e B= {2,4,6,8,10,12,14,16} si ha A-B= {1,3,5,7,9}.

La differenza non gode della proprietà commutativa e nemmeno di quella associativa.

Valgono, invece, le seguenti proprietà:

$A - A = \varnothing$

$A - \varnothing = A$

$\varnothing - A = \varnothing$

Se $A = B \Rightarrow A - B = \varnothing$

Se $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$

➢ Insieme complementare

Se $B \subset A$ la differenza A-B si dice anche **insieme complementare** di B rispetto ad A e si indica scrivendo $C_A B$. Il complementare di un insieme A rispetto all'insieme universo E viene indicato con $\bar{A}$. Si possono verificare le seguenti proprietà:

$A \cup \bar{A} = E$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cup \bar{A} = \varnothing$

Valgono inoltre le seguenti relazioni note come leggi di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} \qquad A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \qquad A - B = (A \cap \overline{B})$$

➢ Differenza simmetrica

Si dice **differenza simmetrica** di due insiemi A e B l'insieme i cui elementi sono quelli non comuni ad A e B. L'operazione si indica con il simbolo **Δ** *(leggi delta)* e si scrive $A \Delta B$.

In simboli $A \Delta B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$.

Esempio: dati gli insiemi A= {1,2,3,4,5,6,7,8,9} e B= {2,4,6,8,10,12,14,16}, AΔB= {1,3,5,7,9,10,12,14,16 }.

La differenza simmetrica gode delle seguenti proprietà:

$A \Delta A = \varnothing$

$A \Delta B = B \Delta A$

$A \Delta \varnothing = A$

Se $B \subset A$ allora $A \Delta B = C_A B$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

➢ Prodotto cartesiano

Si dice **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B non vuoti l'insieme di tutte le coppie ordinate la cui prima componente appartiene ad A e la seconda a B. In simboli si scrive: $A \times B = \{(x,y) | (x \in A) \wedge (y \in B)\}$.
Esempio: dati gli insiemi A= {a,b,c} e B= {1,2} si ha AxB= {(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)}.
Se A=B il prodotto cartesiano si indica con AxA oppure A^2. Si può verificare che $A \times B \neq B \times A$; cioè per il prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa. Inoltre se $A=\emptyset$ oppure $B=\emptyset$ allora $A \times B=\emptyset$.

➢ Logica ed insiemi

In questo paragrafo abbiamo parlato delle operazioni con gli insiemi utilizzando anche i connettivi logici. Per una maggiore chiarezza riportiamo nella *Tab. 2.3* le analogie tra le operazioni con gli insiemi e i connettivi logici.

LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI	LINGUAGGIO DELLA LOGICA
A	**p**
B	**q**
$A \cap B$	$p \wedge q$
$A \cup B$	$p \vee q$
C - A	$\overline{p}$

Tab. 2.3 Operazioni con insiemi e connettivi logici

3. SISTEMI DI NUMERAZIONE

3.1 NUMERAZIONE DECIMALE

Le cifre (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) e la legge che permette di leggere e scrivere un qualunque numero naturale costituiscono il **sistema di numerazione decimale**. Esso fu scoperto da un prete bramino indiano e venne a conoscenza degli arabi nell'800. Venne poi introdotto in Italia verso il 1200 ad opera di Leonardo Fibonacci. Con le dieci cifre si indicano i primi dieci numeri naturali. Il sistema di numerazione decimale è detto **posizionale** perché il valore di una cifra è legato alla posizione che essa occupa nella scrittura del numero. Infatti, la scrittura dei numeri è basata sulla convenzione che ogni cifra posta a sinistra di un'altra è di ordine immediatamente superiore all'ordine di questa, e quindi, ogni unità di un dato ordine rappresenta 10 unità dell'ordine immediatamente inferiore.

Esempio: scrivendo 847 si ha che 7 rappresenta il numero di unità semplici o di 1° ordine, 4 quello delle decine o di 2° ordine e 8 quello delle centinaia o di 3° ordine.

Si vede così che ogni cifra ha un **valore assoluto** che è la quantità di unità semplici e un **valore relativo** che varia al variare del posto che essa occupa nel numero. Per scrivere, quindi, un numero decimale:
si scrive la cifra che indica l'unità di ordine più elevato e di seguito si scrivono quelle di ordine successivamente inferiore mettendo uno zero al posto di ognuna delle cifre degli ordini che mancano.
Per leggere un numero, invece, distinguiamo due casi:

- **il numero non ha più di tre cifre**
  ad esempio si voglia leggere il numero *573*: sapendo che 5 rappresenta il numero delle centinaia, 7 il numero delle decine, 3 quello delle unità il numero si legge *cinquecentosettantatre*;
- **il numero è formato da più di tre cifre**
  in questo caso si scompone il numero in classi cominciando da destra verso sinistra (l'ultima classe può risultare formata da due o da una sola cifra) e si leggono successivamente da sinistra verso destra, i numeri che formano le singole classi facendo seguire ad ogni classe il nome corrispondente.

Esempio: volendo leggere il numero *2.407.082*, cominciando da destra verso sinistra, il numero si scompone in 082 della classe delle unità semplici, in 407 della classe delle migliaia e in 2 della classe dei milioni. Perciò il numero si legge *duemilioniquattrocentosettemilaottantadue*.

3.2 NUMERAZIONE BINARIA

Fra i sistemi di numerazione a base non decimale, è importante conoscere il sistema a base due detto **sistema binario** che è utilizzato dagli elaboratori elettronici. Le cifre della scrittura binaria sono indicate con 0 e 1 e nel linguaggio informatico ciascuna di essa è chiamata **bit**, abbreviazione di **binary digit** che significa, appunto, cifra binaria. Anche questo sistema è posizionale, nel senso che il valore delle cifre che compongono il numero cambia al variare del posto che esse occupano. Il sistema binario, quindi, è fondato sulla convenzione che ogni unità di un dato ordine rappresenta due unità dell'ordine immediatamente inferiore.

3.3 NUMERAZIONE SESSAGESIMALE

Il **sistema sessagesimale** o a base sessanta è il sistema di numerazione che utilizziamo per contare il tempo. Vengono contati i secondi fino a 59 unità, 60 secondi costituiscono 1 minuto (1 minuto = 60 secondi). Similmente, contiamo i minuti fino a 59 unità, 60 minuti costituiscono 1 ora (1 ora = 60 minuti) e 1 ora è anche uguale a 3600 secondi.

Esempio 1: si vogliono ridurre 11415 secondi in un numero del sistema sessagesimale.
Si divide il numero per 60, il quoziente ottenuto ancora per 60, e così via, così che l'ultimo quoziente, seguito dai resti precedenti, ci fornisce il numero cercato:

$$11415 : 60 = 190 \text{ con resto } 15$$

190 : 60 = 3 con resto 10
quindi 11415 secondi = 3 ore 10 minuti 15 secondi ($3^h10^m15^s$)

Esempio 2: si vuole ridurre in secondi il numero del sistema decimale $4^h3^m15^s$

$$4^h = (4x3600)^s = 14400^s \qquad 3^m = (3x60)^s = 180^s$$

$$4^h3^m15^s = (14400)^s + (180)^s + (15)^s = 14595^s$$

3.4 PASSAGGIO DAL SISTEMA DECIMALE A QUELLO BINARIO

Una semplice regola per passare dal sistema decimale a quello binario è la seguente:
si divide successivamente per due il numero dato, il quoziente ottenuto, il quoziente del quoziente e così via, fino ad ottenere il più piccolo quoziente minore di due. La sequenza dei resti in ordine inverso è la rappresentazione in base 2 del numero dato.

Esempio: si vuole trovare il numero, nel sistema binario, corrispondente a 217 nel sistema decimale.

217 : 2 = 108 con resto 1
108 : 2 = 54 con resto 0
54 : 2 = 27 con resto 0
27 : 2 = 13 con resto 1
13 : 2 = 6 con resto 1
6 : 2 = 3 con resto 0
3 : 2 = 1 con resto 1
1 : 2 = 0 con resto 1

Quindi $(217)_{10} = (11011001)_2$

3.5 PASSAGGIO DAL SISTEMA BINARIO A QUELLO DECIMALE

Per passare da un numero binario ad un numero decimale, si può scrivere il numero dato sotto forma di somma di potenze crescenti (partendo dalla potenza 0).

Esempio 1: sia 11011 il numero dato nel sistema binario, si vuole trovare il numero corrispondente nel sistema decimale.

Si ha 11011 =
1 unità del 5° ordine
1 unità del 4° ordine
0 unità del 3° ordine
1 unità del 2° ordine
1 unità del 1° ordine

Quindi $(11011)_2 = 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = (16+8+2+1) = (27)_{10}$

Esempio 2: sia 101101 il numero dato nel sistema binario, si vuole trovare il numero corrispondente nel sistema decimale.

$$(101101)_2 = 1\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = (32+8+4+1) = (45)_{10}$$

3.6 CENNI SULLE OPERAZIONI FONDAMENTALI NEL SISTEMA BINARIO

➢ **Addizione**

Per eseguire un'addizione nel sistema binario, si dispongono i numeri uno sotto l'altro incolonnando le cifre dello stesso ordine. Si sommano le cifre dello stesso ordine con l'avvertenza che la somma di due unità di un dato ordine vale una unità dell'ordine superiore. Perciò dovendo sommare 1 con 1 si scrive 0 al totale e si riporta 1 che è l'unità di ordine superiore. Nel sistema binario si procede tenendo conto che:

0 + 0 = 0
1 + 0 = 0 + 1 = 1
1 + 1 = 10
1 + 1 + 1 = 11

Inoltre, quando in una colonna figurano quattro 1 occorre scrivere 0 in corrispondenza della colonna e riportare 1 nella colonna di due posti a sinistra di quella in esame, quindi:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 100$$

Esempio 1: siano da addizionare $(10101)_2$ e $(1101)_2$
Si ha

$$\begin{array}{r l}
1101 & \rightarrow \text{riporti} \\
10101 & \\
1101 & \\
\hline
100010 &
\end{array}$$

Si ha quindi $(10101)_2 + (1101)_2 = (100010)_2$

Esempio 2: siano da addizionare $(1011)_2$, $(101)_2$, $(1001)_2$, $(11)_2$, $(1)_2$
Si ha :

$$\begin{array}{r l}
11 & \rightarrow \text{riporti} \\
1011 & \\
101 & \\
1001 & \\
11 & \\
1 & \\
\hline
11001 &
\end{array}$$

➤ Sottrazione

La sottrazione nel sistema binario si esegue con la stessa regola con cui si opera nel sistema decimale tenendo presente che ciascuna unità presa a prestito, equivale a due unità di ordine inferiore. Da notare che:

$$10 - 1 = 1; \quad 100 - 1 = 11; \quad 1000 - 1 = 111;$$

Esempio:

$$101 - 11 = 10$$
$$11011 - 1110 = 1101$$
$$100000 - 1010 = 10110$$
$$110101 - 10011 = 100010$$

➤ Moltiplicazione

Si esegue la moltiplicazione con procedimento analogo a quello nel sistema decimale tenendo presente che ogni unità di un dato ordine vale due unità dell'ordine immediatamente inferiore. Da notare che:

$$1 \cdot 1 = 1; \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0;$$

Es. 1: siano da moltiplicare $(11110)_2$ e $(101)_2$; Es. 2: siano da moltiplicare $(11011)_2$ e $(11011)_2$

$$\begin{array}{r}
11110 \\
101 \\
\hline
11110 \\
00000 \\
11110 \\
\hline
10010110
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
11011 \\
11011 \\
\hline
11011 \\
11011 \\
00000 \\
11011 \\
11011 \\
\hline
1011011001
\end{array}$$

➤ Divisione

Anche la divisione si esegue con un procedimento analogo a quello del sistema decimale con l'avvertenza che bisogna tener conto di quanto abbiamo detto a proposito della sottrazione.